

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Spazio affine e vettori applicati | 3 |
| 1.1 Spazi vettoriali su \mathbb{R} | 3 |
| 1.2 Spazi vettoriali euclidei | 7 |
| 1.3 Trasformazioni di basi ortonormali | 14 |
| 1.4 Spazio affine e coordinate curvilinee | 16 |
| 1.5 Prodotto vettoriale e sistemi di vettori applicati | 21 |
| 1.5.1 Il prodotto vettoriale | 21 |
| 1.5.2 Vettori applicati e momento rispetto ad un polo | 24 |
| 1.5.3 Sistemi equivalenti di vettori applicati | 27 |
| 1.5.4 Sistemi di vettori paralleli | 29 |
| 2 Equazioni differenziali | 31 |
| 2.1 Introduzione | 31 |
| 2.2 Considerazioni generali | 32 |
| 2.3 Il problema di Cauchy | 34 |
| 2.3.1 Equazioni autonome | 35 |
| 2.3.2 Equazioni reversibili | 36 |
| 2.3.3 Equazioni integrabili | 37 |
| 2.4 Equazioni del primo ordine in forma normale | 37 |
| 2.5 Equazioni del secondo ordine in forma normale del tipo $\ddot{q} = f(\dot{q})$ | 39 |
| 2.6 Equazioni del secondo ordine del tipo $\ddot{q} = f(q)$: caso conservativo | 41 |
| 2.6.1 Analisi qualitativa nel caso conservativo | 43 |
| 2.6.2 Periodo delle oscillazioni in vicinanza di punti di equilibrio stabile | 54 |
| 2.6.3 Generalizzazione del caso conservativo | 55 |
| 2.7 Il piano delle fasi | 56 |
| 2.8 Punti di equilibrio, stabilità | 58 |
| 2.8.1 Il criterio di Lyapunov | 59 |
| 2.8.2 Asintotica stabilità | 60 |
| 2.8.3 Punti di equilibrio per sistemi conservativi: il criterio di Dirichlet | 62 |
| 2.9 I potenziali isocroni | 63 |
| 2.10 Sistemi lineari bidimensionali | 67 |
| 2.11 Moto armonico smorzato | 78 |
| 2.12 Moto armonico smorzato con forzante esterna | 80 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.13 | Sistemi lineari n -dimensionali | 83 |
| 3 | Equazioni di Lagrange | 87 |
| 3.1 | Cinematica del punto | 87 |
| 3.2 | Forze conservative | 92 |
| 3.2.1 | Campi scalari e gradiente | 92 |
| 3.2.2 | Campi vettoriali e campi gradiente | 94 |
| 3.2.3 | Forza posizionale e forza conservativa | 97 |
| 3.3 | Equazioni di Lagrange per un punto materiale | 102 |
| 3.3.1 | Conservazione dell'energia, variabili cicliche e funzione di Routh | 103 |
| 3.4 | Il moto centrale | 108 |
| 3.4.1 | L'equazione per r | 112 |
| 3.4.2 | Il problema di Keplero | 113 |
| 3.4.3 | L'orbita del problema di Keplero | 118 |
| 3.4.4 | La terza legge | 121 |
| 4 | Sistemi vincolati e coordinate lagrangiane | 123 |
| 4.1 | Sistemi olonomi | 123 |
| 4.1.1 | Spostamenti virtuali in funzione delle coordinate lagrangiane . | 133 |
| 4.1.2 | Velocità ed energia cinetica | 141 |
| 4.1.3 | Punto vincolato sulla superficie | 145 |
| 5 | Le equazioni di moto per sistemi vincolati | 151 |
| 5.1 | Dinamica di un punto vincolato sulla superficie. | 152 |
| 5.2 | L'equazione simbolica della dinamica | 155 |
| 5.3 | Le equazioni di Lagrange | 160 |
| 5.3.1 | Equazioni di Lagrange e statica del punto materiale sulla superficie | 162 |
| 5.3.2 | Equazioni di Lagrange di prima specie | 172 |
| 5.4 | Risolubilità delle equazioni di Lagrange | 174 |
| 5.5 | Invarianza delle equazioni di Lagrange | 175 |
| 5.6 | Coordinate cicliche | 178 |
| 5.7 | La funzione Hamiltoniana e la conservazione dell'energia | 182 |
| 5.8 | Il teorema di Noether | 190 |
| 5.9 | Equilibrio | 195 |
| 5.9.1 | Stabilità | 198 |
| 5.10 | Piccole Oscillazioni | 199 |
| 5.10.1 | Sistemi con un solo grado di libertà | 200 |
| 5.10.2 | Sistemi con l gradi di libertà | 201 |
| 5.10.3 | Esempio: la catena di oscillatori | 211 |
| 6 | Cinematica dei Sistemi Rigidi | 215 |
| 6.1 | Introduzione | 215 |
| 6.2 | Moti rigidi | 215 |
| 6.2.1 | Primo caso: $\Omega \equiv O$ | 217 |
| 6.2.2 | Secondo caso: $\Omega \neq O$ | 224 |
| 6.2.3 | Gradi di libertà di un corpo rigido | 224 |
| 6.3 | Formula fondamentale del moto rigido | 227 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.4 | Angoli di Eulero | 238 |
| 6.5 | Asse istantaneo di moto, rigate del moto | 242 |
| 6.6 | Cinematica relativa: composizione delle velocità | 247 |
| 6.7 | Formula di Poisson | 249 |
| 6.8 | Composizione di moti rigidi | 251 |
| 6.9 | Cinematica relativa: l'accelerazione | 253 |
| 7 | Dinamica Sistemi Rigidi | 255 |
| 7.1 | Il centro di massa | 256 |
| 7.2 | Il momento angolare | 259 |
| 7.3 | Geometria delle masse | 259 |
| 7.3.1 | Momenti d'inerzia | 260 |
| 7.3.2 | Omografia d'inerzia, matrice d'inerzia e terna principale d'inerzia | 263 |
| 7.3.3 | Ellissoide d'inerzia | 269 |
| 7.3.4 | Determinazione della terna principale d'inerzia nel caso di sistemi piani | 270 |
| 7.3.5 | Esempi e complementi | 274 |
| 7.4 | Le equazioni cardinali | 283 |
| 7.5 | Le equazioni cardinali sono sufficienti per determinare il moto dei rigidi | 286 |
| 7.6 | Momento angolare, energia cinetica e seconda equazione cardinale per i sistemi rigidi | 289 |
| 7.6.1 | Momento angolare per un sistema rigido | 290 |
| 7.6.2 | Seconda equazione cardinale per i sistemi rigidi | 291 |
| 7.6.3 | Reazioni vincolari applicate all'asse di rotazione | 297 |
| 7.6.4 | L'energia cinetica | 301 |
| 7.7 | Le precessioni per inerzia | 306 |
| 7.7.1 | Le equazioni di Eulero | 307 |
| 7.7.2 | Risoluzione dell'equazione di Eulero nel caso di precessioni per inerzia | 308 |
| 7.7.3 | Il moto à la Poincot | 313 |
| 7.8 | Lagrangiana del corpo rigido | 314 |
| 7.9 | Il giroscopio pesante | 318 |
| 8 | Principi variazionali | 325 |
| 8.1 | La brachistocrona | 326 |
| 8.1.1 | La trattazione moderna | 328 |
| 8.2 | L'equazione di Eulero-Lagrange | 329 |
| 8.2.1 | Un integrale primo e ritorno alla brachistocrona | 334 |
| 8.3 | Funzionali dipendenti da l funzioni | 339 |
| 8.3.1 | Massimizzazione vincolata | 341 |
| 8.4 | Il principio di Hamilton | 346 |
| 8.4.1 | Sistemi vincolati ed equazioni di Lagrange di prima specie | 349 |
| 8.5 | Il principio di Jacobi | 351 |
| 8.5.1 | Coordinate cicliche nell'ambito del principio di Hamilton | 351 |
| 8.5.2 | Il tempo come variabile | 354 |
| 8.5.3 | Formulazione del principio di Jacobi | 356 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 9 | Il Sistema Canonico | 361 |
| 9.1 | Il Teorema di Liouville | 363 |
| 9.2 | Le parentesi di Poisson | 366 |
| 9.3 | Derivazione variazionale delle equazioni di Hamilton | 368 |